Séries temporelles

Exercices : énoncés

V. Lefieux

ISUP

UPMC
SORBONNE UNIVERSITÉS

Remarques générales
Sauf mention contraire, on désignera par :
— bruit blanc : un bruit blanc faible,
— processus stationnaire : un processus faiblement stationnaire.

Exercice 1
Soient les moyennes mobiles $M_{(1)}$ et $M_{(2)}$ suivantes :

$$M_{(1)} = \frac{1}{2} B \left(I + F\right),$$
$$M_{(2)} = \frac{1}{4} B \left(I + F + F^2 + F^3\right).$$

1. (a) *Quelles sont les séries temporelles absorbées par $M_{(1)}$?*
   (b) *Quelles sont les séries temporelles invariantes par $M_{(1)}$?*
2. (a) *Quelles sont les séries temporelles absorbées par $M_{(2)}$?*
   (b) *Quelles sont les séries temporelles invariantes par $M_{(2)}$?*
3. *Montrer que $M_{(1)}M_{(2)}$ laisse invariantes les tendances linéaires.*
4. *Quelles sont les séries temporelles absorbées par $\left(M_{(2)}\right)^2$?*

Exercice 2
Soient les moyennes mobiles suivantes :

$$M_{(1)} = \frac{1}{3} B^2 \left(I + F + F^2\right),$$
$$M_{(2)} = 2M_{(1)} - \left(M_{(1)}\right)^2.$$

1. *Montrer que $M_{(2)}$ laisse invariantes les tendances linéaires.*
2. *Quelles sont les séries temporelles absorbées par $M_{(2)}$ et $\left(M_{(2)}\right)^2$?*
3. *Calculer le pouvoir de réduction de variance de $M_{(2)}$.*

Exercice 3
Soit $(X_t)_{t\in\{1,\ldots,T\}}$ une série temporelle dont la tendance est localement polynomiale de degré $p = 3$:

$$\forall h \in \{-m, \ldots, m\} : X_{t+h} = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \varepsilon_{t+h}$$

où ε_t est une perturbation aléatoire d'espérance nulle.
On veut estimer les paramètres a_i pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ du modèle par les moindres carrés ordinaires sur les $2m + 1$ points $X_{t-m}, \ldots, X_{t+m}$. On note $\widehat{a}_i$ cet estimateur de a_i.

1. *Déterminer le système d'équations définissant les $\widehat{a}_i$.*
2. *Expliciter l'estimateur $\widehat{a}_0$ comme une combinaison linéaire des valeurs $X_{t-m}, \ldots, X_{t+m}$. Cela définit une moyenne mobile M^3_{2m+1} centrée symétrique d'ordre $2m + 1$ appelée moyenne mobile cubique sur $2m + 1$ points.*

3. *Montrer que* M^3_{2m+1} *laisse invariantes les tendances polynomiales de degré inférieur ou égal à trois.*
4. *On considère maintenant la moyenne mobile cubique sur 7 points :* M^3_7.
   (a) *Expliciter les coefficients de* M^3_7.
   (b) *Vérifier que* M^3_7 *peut s'écrire :*

$$M^3_7 = I - \frac{1}{21}(I-B)^4\left(2F^3+5F^2+2F\right).$$

   (c) *Calculer le pouvoir de réduction de variance de* M^3_7.

Exercice 4 (Sous R)

1. *Générer les séries temporelles suivantes pour* $t \in \{1, \ldots, 200\}$ *:*
   — T_t, *une tendance linéaire :*
   $$T_t = 100 + 3t,$$
   — S^1_t, *une série périodique de période 3 :*
   $$S^1_t = 50\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right),$$
   — S^2_t, *une série périodique de période 4 :*
   $$S^2_t = 50\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}t\right),$$
   — S_t, *une série périodique de période 12 :*
   $$S_t = S^1_t + S^2_t,$$
   — ε_t, *une perturbation i.i.d. suivant une loi normale :*
   $$\varepsilon_t \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, 15^2\right),$$
   — X_t :
   $$X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t.$$
2. *Appliquer les moyennes mobiles* M_3, $M_{2\times4}$ *et* $M_{2\times12}$ *sur ces séries et commenter.*

Exercice 5

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc de variance* σ^2.
Etudier (par le calcul) la stationnarité des processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *suivants, et donner leur fonction d'autocovariance lorsque cela s'avère possible :*

1. $X_t = a + b\varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1}$ *où* $(a,b,c) \in (\mathbb{R}^*)^3$.
2. $X_t = \varepsilon_t\cos(\omega t) + \varepsilon_{t-1}\sin(\omega)$ *où* $\omega \in [0, 2\pi[$.

Exercice 6

Soit $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *une suite de v.a.r. i.i.d. de loi* $\mathcal{N}(0,1)$.
Etudier la stationnarité des processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *suivants, et donner leur fonction d'autocovariance s'ils sont stationnaires :*

1. $X_t = u_1 + \ldots + u_t$.
2. $X_t = u_t u_{t-1}$.

Exercice 7

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc de variance* σ^2.
Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un processus vérifiant :*

$$X_t = at + b + \varepsilon_t.$$

1. *A quelle condition le processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est-il stationnaire ?*
2. *Etudier la stationnarité du processus* $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *« différence première » :*

$$Y_t = X_t - X_{t-1}.$$

Exercice 8

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc de variance* σ^2.
Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un processus vérifiant :*

$$X_t = \sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

où $q \in \mathbb{N}^*$ *et* $(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_q) \in \mathbb{R}^{q+1}$.

1. *Indiquer pourquoi le processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est stationnaire.*
2. *Calculer l'espérance de* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
3. *Calculer la fonction d'autocovariance de* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 9

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc de variance* σ^2.
Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *un processus vérifiant :*

$$X_t = \sum_{i=0}^{t} (-1)^i \varepsilon_i.$$

1. *Le processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *est-il du second ordre ?*
2. *Calculer les termes* $\operatorname{Cov}(X_t, X_{t+h})$ *pour* $t \in \mathbb{N}$ *et* $t+h \in \mathbb{N}$ *(on distinguera les cas* $h \geq 0$ *et* $h < 0$*).*
3. *Le processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *est-il stationnaire ?*

Exercice 10

Soit une fonction d'autocovariance réelle possédant un nombre fini de valeurs non nulles.

1. *Montrer que la densité spectrale associée est de la forme :*

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(c_0 + 2\sum_{h=1} c_h \cos(\omega h)\right).$$

2. *Définir un processus stationnaire ayant pour densité spectrale :*

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}(5 - 4\cos\omega).$$

Exercice 11 (Source : Bernard Bercu, Bordeaux 1)

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de v.a.r indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$, et soit $\xi_t = \frac{\varepsilon_t^2 - 1}{\sqrt{2}}$.
Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus vérifiant :

$$X_t = \begin{cases} \varepsilon_t & si\ t \in \mathbb{Z}\ est\ pair \\ \xi_{t-1} & si\ t \in \mathbb{Z}\ est\ impair \end{cases}.$$

1. *Vérifier que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une suite de v.a.r indépendantes.*
2. *Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance 1.*

Exercice 12 (Source : Bernard Bercu, Bordeaux 1)

Soit $a \in]0,\pi]$.
Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire admettant la densité spectrale suivante :

$$f(\omega) = \begin{cases} \dfrac{a - |\omega|}{a^2} & si\ |\omega| \le a \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

1. *Calculer la fonction d'autocovariance du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.*
2. *En déduire l'égalité :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(na)}{n^2} = \frac{1}{12}\left[3(\pi - a)^2 - \pi^2\right].$$

Exercice 13

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance σ^2.
Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus vérifiant :

$$X_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i \varepsilon_{t-i} \tag{1}$$

où θ est tel que $\theta \neq 0$ et $|\theta| < 1$.

1. *Calculer la fonction d'autocovariance et l'autocorrélogramme simple de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$?*

2. *Calculer la densité spectrale de* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. *La représenter graphiquement.*
3. *Soit* $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un processus vérifiant :*

$$Y_t = \varphi Y_{t-1} + \eta_t$$

   où $\varphi \neq 0$, $|\varphi| < 1$, *et où* $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est un bruit blanc de variance* σ^2 *tel que* $\eta_t \perp \mathcal{H}_{-\infty}^{t-1}(Y)$.
   Calculer la fonction d'autocovariance de $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
   Comparer avec la première question.
4. *Dans le cas général, soit une suite* $(c_h)_{h\in\mathbb{Z}}$ *définie par :*

$$c_h = ab^{|h|}$$

   où $a > 0$ *et* $|b| < 1$.
   Montrer que $(c_h)_{h\in\mathbb{Z}}$ *est une fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire de la forme (**??**) à définir.*

Exercice 14
Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc de variance* σ^2.
Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un processus vérifiant :*

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}.$$

1. *On suppose que* $|\theta| < 1$.
   (a) *Calculer la prévision linéaire optimale de* X_{t+1} *à partir du passé* $(X_i)_{i\leq t}$.
   (b) *Quelle est la variance de l'erreur de prévision linéaire de* X_{t+1} *à partir du passé* $(X_i)_{i\leq t}$ *?*
2. *On suppose que* $\theta = 1$.
   Donner l'expression de la prévision linéaire optimale de X_{t+1} *à partir de* $(X_i)_{1\leq i\leq t}$, *ainsi que la variance de son erreur de prévision.*

Exercice 15
Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *un bruit blanc de variance* σ^2 *avec* $\varepsilon_0 = 0$.
Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *un processus vérifiant :*

$$\forall t \in \mathbb{N}^* : X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

où $|\theta| < 1$, *et* $X_0 = 0$.
On peut montrer par récurrence que $\varepsilon_t \perp \mathcal{H}_0^{t-1}(X)$ *pour* $t \in \mathbb{N}$.

1. *Construire* $\widehat{X}_1(1)$ *le prédicteur de* X_2 *sachant* X_1, *puis* $\widehat{X}_2(1)$ *le prédicteur de* X_3 *sachant* X_1 *et* X_2. *Trouver ensuite une relation de récurrence simple exprimant* $\widehat{X}_t(1)$ *en fonction de* $\widehat{X}_{t-1}(1)$ *et de* X_t.
2. *Pour* $h > 1$, *montrer que* $\widehat{X}_t(h)$ *est constant (ne dépend pas de* h*).*
3. *Montrer que la solution* $\widehat{X}_t(h)$ *est égale à un lissage exponentiel simple du processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *(on indiquera le coefficient de lissage).*

4. *Calculer l'erreur de prévision de X_{t+h} et trouver sa variance.*
   Que se passe-t-il lorsque $h \to +\infty$?

Exercice 16
Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus $MA(1)$:

$$X_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort de variance 1 tel que :

$$\forall t \in \mathbb{Z} : \mathbb{E}\left(\varepsilon_t^3\right) = c < +\infty.$$

Soit $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus tel que :

$$X_t = \eta_t - \frac{1}{2}\eta_{t-1}.$$

1. *Vérifier que $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc dont on calculera la variance.*
2. *Montrer que $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est l'innovation du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.*
3. *Montrer que :*
$$\eta_t = \varepsilon_t - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{3}{2^i}\varepsilon_{t-i}.$$
4. *Calculer $\mathbb{E}\left(\eta_1^2\eta_2\right)$.*
5. *En déduire que η_1 et η_2 ne sont pas des v.a.r. indépendantes ?*

Exercice 17
Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de v.a.r. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus vérifiant :

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

où $\theta \neq 0$ et $|\theta| < 1$.
Soit $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus vérifiant :

$$Y_t = \begin{cases} 1 & si\ X_t > 0 \\ 0 & si\ X_t \leq 0 \end{cases}.$$

1. (a) *Quelle est la loi des v.a.r. Y_t pour $t \in \mathbb{Z}$?*
   (b) *Quelle est la loi conjointe du vecteur aléatoire (X_t, X_{t-1}) ?*
2. *Montrer que le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire et donner sa fonction d'autocovariance.*
3. *Déduire de ce qui précède que le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ admet une représentation du type :*
$$Y_t = \mu + u_t - \alpha u_{t-1}$$
   où μ est une constante à préciser et $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2.

4. Proposer une méthode pour calculer α et σ^2.

Indication
On admettra que :

$$\mathbb{P}\left(X_t > 0, X_{t-1} > 0\right) = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2+\theta^4}}\right)$$

et que :

$$\mathbb{P}\left(X_t > 0, X_{t-1} > 0\right) \leq \frac{1}{8}.$$

Exercice 18
Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus vérifiant :

$$X_t = \frac{10}{3} X_{t-1} - X_{t-2} + u_t - \frac{5}{6} u_{t-1} + \frac{1}{6} u_{t-2}$$

où $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible de variance 1.

1. *Mettre l'écriture du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sous la forme :*

$$\Phi(B) X_t = \Theta(B) u_t.$$

2. *Factoriser Φ et Θ.*
3. *Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est-il stationnaire ?*
4. (a) *Donner la représentation minimale du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.*
   (b) *Quel nom porte le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$?*
5. (a) *Déterminer la représentation minimale canonique du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ en notant $(v_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le bruit blanc associé.*
   (b) *Quel nom donne t-on au processus $(v_t)_{t\in\mathbb{Z}}$?*
   (c) *Calculer la variance de $(v_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.*
6. (a) *Déterminer l'écriture $MA(\infty)$ du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.*
   (b) *En déduire l'espérance et la variance de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.*
   (c) *Calculer l'autocorrélogramme simple $(\rho(h))_{h\in\mathbb{Z}}$ de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ à partir de la représentation $MA(\infty)$.*
7. *Calculer la prévision linéaire optimale de X_{T+1} et X_{T+2} à partir de $(X_t)_{t\leq T}$.*

Exercice 19
Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance σ^2.
Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus vérifiant :

$$X_t = \frac{1}{2} X_{t-1} - \frac{1}{4} X_{t-2} + \varepsilon_t.$$

1. *Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus $AR(2)$ canonique.*

2. *Montrer que les termes d'autocovariance $\gamma(h)$, pour $h > 0$, vérifient l'équation de récurrence suivante :*

$$\gamma(h) = \frac{1}{2}\gamma(h-1) - \frac{1}{4}\gamma(h-2).$$

3. *Exprimer $\gamma(1)$ et $\gamma(2)$ en fonction de $\gamma(0)$.*
4. *Résoudre l'équation de récurrence linéaire et exprimer la solution en fonction de $\gamma(0)$.*
5. *Calculer $\gamma(0)$ en fonction de σ^2.*

Exercice 20

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus vérifiant :

$$X_t = 4X_{t-1} - 4X_{t-2} + \varepsilon_t$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance 1.

1. *Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est-il stationnaire ? Si oui, est-il canonique ?*
2. *Déterminer la représentation canonique du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ en notant $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le bruit blanc associé.*
3. *Calculer la variance de $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$?*
4. *Quelle est l'écriture moyenne mobile infinie du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$?*
5. *En déduire $\mathbb{E}(X_t)$ et $\mathrm{Var}(X_t)$.*
6. *Calculer l'autocorrélogramme simple du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.*
   Calculer explicitement $\rho(h)$ pour $h \in \{0,1,2,3,4\}$.
7. *Déterminer l'autocorrélogramme partiel du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.*
8. *Calculer la prévision linéaire optimale de X_{T+1} et X_{T+2} à partir de $(X_t)_{t\leq T}$.*
9. *Soit le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivant :*

   $$Y_t = \frac{3}{4}Y_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-1} + \xi_t$$

   où $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance 1, non corrélé à $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
   Soit le processus $(\omega_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivant :

   $$\omega_t = \left(I - \frac{3}{4}B\right)\left(I - \frac{1}{2}B\right)^2 Y_t.$$

   (a) *Calculer l'espérance et la variance de $(\omega_t)_{t\in\mathbb{Z}}$?*
   (b) *Calculer l'autocorrélogramme simple du processus $(\omega_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.*
   (c) *En déduire que le processus $(\omega_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est solution de l'équation :*

   $$\omega_t = \nu_t + \theta_1\nu_{t-1} + \theta_2\nu_{t-2}$$

   où $(\nu_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc.

(d) *En déduire que* $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est un processus ARMA dont on précisera les ordres respectifs de la partie autorégressive et de la partie moyenne mobile.*

Indication
Pour $0 < \rho < 1$, *on a :*

$$\sum_{i=0}^{+\infty} i\rho^i = \frac{\rho}{(1-\rho)^2},$$
$$\sum_{i=0}^{+\infty} i^2\rho^i = \frac{\rho(\rho+1)}{(1-\rho)^3}.$$

Exercice 21 (Source : [?])
Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *et* $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *deux processus indépendants qui vérifient :*
— $(I - \varphi_1 B) X_t = \varepsilon_t$ *où* $|\varphi_1| < 1$, $\varphi_1 \neq 0$ *et* $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est un bruit blanc faible de variance* σ_ε^2.
— $(I - \varphi_2 B) Y_t = \eta_t$ *où* $|\varphi_2| < 1$, $\varphi_2 \neq 0$ *et* $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est un bruit blanc faible de variance* σ_η^2.

On suppose que les processus $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *et* $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *sont indépendants.*
On pose $Z_t = X_t + Y_t$. *Le problème consiste à étudier la prévision de* Z_{T+1}, *où* T *désigne le dernier instant pour lequel* (X_t) *et* (Y_t) *sont connus.*

1. (a) *Que peut-on dire des processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *et* $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *?*
   (b) *Calculer les prévisions linéaires optimales de* X_{T+1} *et* Y_{T+1} *connaissant* $(X_t)_{t\leq T}$ *et* $(Y_t)_{t\leq T}$.
   (c) *En déduire la prévision* $\widehat{Z}_{T+1}$ *de* Z_{T+1}.
   (d) *Calculer la variance* V_D *de l'erreur de prévision de* Z_{T+1} *à l'aide de cette méthode « désagrégée ».*
2. (a) *Montrer que* $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *vérifie :*
   $$\Phi(B) Z_t = \xi_t$$
   où $\Phi(B) = I - (\varphi_1 + \varphi_2) B + \varphi_1\varphi_2 B^2$ *et* $\xi_t = \varepsilon_t - \varphi_2\varepsilon_{t-1} + \eta_t - \varphi_1\eta_{t-1}$.
   (b) *Calculer l'autocorrélogramme de* $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
   (c) *Quelle(s) condition(s) doivent satisfaire* φ_1, φ_2, σ_ε^2 *et* σ_η^2 *pour que le processus* $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *soit un* $AR(2)$ *?*
   (d) *Montrer que* $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *peut s'écrire sous la forme :*
   $$\xi_t = (I - \theta B)\,\omega_t$$
   où $|\theta| \neq 1$ *et* $(\omega_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est un bruit blanc de variance* σ_ω^2.
   (e) *Comment déterminer* θ *et* σ_ω^2 *à partir de* φ_1, φ_2, σ_ε^2 *et* σ_η^2 *(on n'effectuera pas les calculs) ?*
   (f) *On choisit la solution au problème précédent telle que* $|\theta| < 1$. *Dans ce cas, quelle propriété vérifie le bruit blanc ?*

(g) *En déduire que, dans le cas général,* $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est un* $ARMA(p,q)$ *avec* p *et* q *à déterminer. La représentation est-elle canonique ?*

3. (a) *Montrer la relation suivante :*

$$\omega_t = \varepsilon_t + (\theta - \varphi_2)(I - \theta B)^{-1} \varepsilon_{t-1} + \eta_t + (\theta - \varphi_1)(I - \theta B)^{-1} \eta_{t-1}.$$

(b) *En déduire une expression de* $V_A - V_D$ *où* V_A *est la variance de l'erreur de prévision de* Z_{T+1} *connaissant* $(Z_t)_{t\leq T}$ *(méthode « agrégée »).*

(c) *Vérifier que* $V_A - V_D \geq 0$.
Dans quel cas a-t-on $V_A = V_D$ *?*

Exercice 22 (Source : Bernard Bercu, Université de Bordeaux 1)
Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc de variance* σ^2.
Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *et* $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *deux processus qui vérifient :*

$$\begin{cases} X_t = \alpha X_{t-1} + Y_t \\ Y_t = \beta Y_{t-1} + \varepsilon_t \end{cases}$$

où $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$ *et* $\alpha \neq \beta$.

1. *Montrer que :*
$$X_t = (\alpha + \beta) X_{t-1} - \alpha\beta X_{t-2} + \varepsilon_t.$$
2. *Donner le nom et les propriétés de ce processus.*
3. *Déterminer l'écriture* $MA(\infty)$ *du processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
4. *En déduire que :*
$$\mathbb{E}\left(X_t^2\right) = \frac{1 + \alpha\beta}{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)(1-\alpha\beta)}\sigma^2.$$

Exercice 23 (Sous R)
Modéliser sous forme de processus SARIMA les séries simul1, simul2, simul3 et simul4. Ces séries sont contenues dans les fichiers 'simul1.txt', etc.

Exercice 24 (Sous R)
Modéliser sous forme de processus SARIMA elec_austr (contenue dans le fichier 'elec_austr.txt') : la production mensuelle australienne d'électricité (en millions de kWh) de janvier 1956 à février 1991. On pourra considérer la série à partir de 1970.
Effectuer une prévision, ainsi qu'une analyse a posteriori, sur un cycle saisonnier (12 mois).

Bibliographie

[1] Christian Gourieroux et Alain Monfort : *Séries temporelles et modèles dynamiques.* Springer, 1990.