Statistique inférentielle - TD 4

Exercice 1.

Soit X de loi $\Gamma(q,\theta)$, ou $q>0$ et $\theta>0$, et $X_1,...,X_n$ un echantillon de meme loi que X.

1. On suppose $q>0$ connu et $\theta>0$ inconnu.
   (a) Proposer un estimateur empirique de θ.
   (b) Construire un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1-\alpha$ pour θ. Expliciter l'intervalle de niveau 95% lorsque $q=2$ et $n=10$. (On rappelle $\Phi(1.96)=0.975$ où Φ f.d.r. d'une $\mathcal{N}(0,1)$)
   (c) On cherche a present un intervalle de confiance non asymptotique.
      i. Montrer que, pour tout $t<\theta$, $E_\theta[\exp(tX)]=\frac{1}{(1-t/\theta)^q}$.
      ii. En deduire que
      * pour tout $x>0$, $P_\theta(X-q/\theta\geq x)\leq \exp(-\theta x+q\log(1+\theta x/q))$,
      * pour tout $0<x<q/\theta$, $P_\theta(X-q/\theta\leq -x)\leq \exp(\theta x+q\log(1-\theta x/q))$.
      (On rappelle l'inégalité de Chernoff : $\mathbb{P}(X\geq x)\leq E[\exp(tX)]\exp(-tx)$.)
      iii. Rappeler la loi de $\bar{X}_n=n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$, puis deduire des questions precedentes des intervalles de confiance non asymptotiques, unilateres ou bilateres, de niveau 95% lorsque $q=2$ et $n=10$.
   (d) On suppose $\theta>0$ connu et $q>0$ inconnu.
      i. Proposer un estimateur empirique de q.
      ii. Construire un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1-\alpha$ pour q.
   (e) On suppose $\theta>0$ et $q>0$ inconnus. Proposer des estimateurs empiriques de $\theta>0$ et $q>0$. Sont-ils consistants ?

Exercice 2.

On observe $X_1,...,X_n$ independantes et de meme loi. On suppose que cette loi admet la densite :

$$f_\theta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right).$$

(a) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\tau=\theta^2$, noté $\hat{\tau}$. Quelle est la loi de $\hat{\tau}$?
(b) Construire un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ de la forme $[S_1,S_2]$ tel que

$$\mathbb{P}(\tau<S_1)=\mathbb{P}(\tau>S_2)=\alpha/2.$$

(c) Déterminer la loi asymptotique de $\hat{\tau}$ et en déduire un intervalle de confiance asymptotique.
(d) Lorsque $n=10$, $\hat{\tau}=2$ et $\alpha=0.05$, comparer l'intervalle de confiance obtenu a la question 2 (non asymptotique) avec celui obtenu a la question 3 (asymptotique). (On précise que, si F_{10} désigne la fonction de répartition d'un χ^2 à n degré de libertés, $F_{10}^{-1}(0.025)=3.25$ et $F_{10}^{-1}(0.975)=20.48$, de plus, si Φ est la f.d.r. d'une $\mathcal{N}(0,1)$, $\Phi(0.975)=1.96$)

Exercice 3.

Méthode de stabilisation de la variance. On considère $\hat{\theta}\in\mathbb{R}$ un estimateur tel que

$$n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta_0)\Longrightarrow\mathcal{N}(0,v(\theta_0)).$$

(a) Pourquoi cette distribution asymptotique pose-t-elle un problème quand il s'agit de calculer un intervalle de confiance pour θ_0 ?

(b) Soit g telle que $g'(\theta) = v(\theta)^{-1/2}$. Quelle est la loi limite de $g(\hat{\theta})$?

(c) Montrer qu'il existe toujours une fonction g monotone telle que

$$n^{1/2}(g(\hat{\theta}) - g(\theta_0)) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

(d) En déduire un intervalle de confiance asymptotique de $g(\theta_0)$, puis de θ_0.

(e) Illustration : Soit $\theta_0 \in]0, 1[$ un paramètre inconnu, on note X une variable aléatoire de loi définie par

$$\mathbb{P}_\theta(X = k) = (k + 1)(1 - \theta^2)\theta^k,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. On donne

$$\begin{aligned} E_\theta[X] &= \frac{2\theta}{1-\theta}, \\ Var_\theta(X) &= \frac{2\theta}{(1-\theta)^2}. \end{aligned}$$

On dispose de $(X_1, ..., X_n)$ i.i.d. de même loi que X.

i. Donner un estimateur de $\hat{\theta}$ de θ_0 par la méthode des moments.

ii. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance n'est pas toujours défini.

iii. Consistance de $\hat{\theta}$ et loi limite ?

iv. Déterminer un intervalle de confiance à 90% (On rappelle $\Phi(0.95) = 1.64$)