Statistique inférentielle - TD 2

Exercice 1.

On considere un echantillon $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ tel que $E(X_1) = m$ et $Var(X_1) = \sigma^2$. On suppose σ^2 connue, $m \in \mathbb{R}$ etant ici le parametre inconnu. On propose deux estimateurs de m : $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$ et $Z_n = \frac{1}{2}(X_n + X_{n-1})$.

1. Montrer que ces deux estimateurs sont sans biais.
2. Lequel des deux choisiriez-vous pour approcher m ?
3. Que pensez-vous de l'estimateur $W_n = 0$?

Exercice 2.

1. Rappeler les définitions des modes de convergence suivants : en probabilité, dans L^2, en loi, presque sûre.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. qui converge en probabilité vers une constante a. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $(h(X_n))_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers $h(a)$.
3. Soit $\alpha \in]0, \infty[$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. admettant pour densité

$$f(x) = 2\alpha x \exp(-\alpha x^2)\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue.

(a) Calculer $E[X_1^2]$.

(b) Etudier la convergence presque sûre et en probabilité de $V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

(c) Etudier la convergence en probabilité de $W_n = n/\sum_{i=1}^n X_i^2$.

Exercice 3.

Pour chacun des modèles suivants, on déterminera :
— un estimateur du ou des paramètres par la méthode des moments
— l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) (si possible via une formule fermée)
— on étudiera la convergence de l'estimateur

1. $(X_1, ..., X_n)$ i.i.d. de loi de Poisson de paramètre θ_0.
2. $(X_1, ..., X_n)$ i.i.d. de loi exponentielle de paramètre θ_0.
3. $(X_1, ..., X_n)$ i.i.d. de loi Pareto $(1, \theta_0)$, i.e. de fonction de répartition $F_{\theta_0} = 1 - t^{-\theta_0}$, pour $t \geq 1$.
4. $(X_1, ..., X_n)$ i.i.d. de loi binomiale négative de paramètres $\theta_0 = (r_0, q_0)$. (Indication : pour déterminer la variance, on pourra commencer par montrer la formule $Var(X_1) = E[Var(X_1|Y_1)] + Var(E[X_1|Y_1]))$
5. $(X_1, ..., X_n)$ i.i.d. de loi Gamma de paramètres $\theta_0 = (r_0, \lambda_0)$.

Exercice 4. Delta-méthode.

On considère une suite de variables aléatoires $W_n \in \mathbb{R}^p$ telles que $n^{1/2}(W_n - w_0) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \Sigma)$. Soit g de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^d$ une fonction deux fois continûment différentiable en w_0.

1. Montrer que

$$g(W_n) - g(w_0) = A(W_n - w_0) + R_n,$$

où A est une matrice de p lignes et d colonnes que l'on précisera, et $n^{1/2}R_n \to 0$ en probabilité.

2. En déduire que $n^{1/2}(g(W_n) - g(w_0))$ converge en loi vers une distribution limite que l'on précisera.
3. Appliquer cette méthode pour déterminer la loi asymptotique des estimateurs par la méthode des moments de l'exercice ci-dessus.

Exercice 5.

Soit X une v.a.r. admettant pour densite $f_\theta(x) = C_\theta \exp(-(x-\theta)/\theta)\mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}(x)$ ou $\theta > 0$ est inconnu, et $(X_1, ..., X_n)$ un echantillon i.i.d. de meme loi que X.

1. Que vaut C_θ ?
2. Déterminer la fonction de répartition de $X_{(1)} = \min_{1\leq i\leq n} X_i$.
3. Etudier la convergence de $X_{(1)}$ vers θ en moyenne quadratique.
4. Quelle est la loi limite ?

Exercice 6.

On considere un echantillon $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ avec X_1 de densite $f_\theta(x) = \frac{2}{\theta^2} x 1_{[0,\theta]}(x)$, ou $\theta > 0$ est un parametre inconnu.

1. On pose $X_{(n)} = max_{1\leq i\leq n} X_i$.
   (a) Montrer que la loi de $X_{(n)}$ est absolument continue et donner sa densite. (b) Donner les deux premiers moments de $X_{(n)}$. En deduire sa variance. (c) Montrer que $X_(n)$ converge en probabilite vers θ.
2. Etudier la convergence de la moyenne empirique $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$. En deduire un estimateur convergent de θ.
3. Qui de $X_{(n)}$ ou de ce second estimateur choisiriez-vous pour estimer θ ?