TD DE MODÈLE LINÉAIRE - FEUILLE 1

Exercice 1 Une variable aléatoire est dite de loi Gamma de paramètres α et λ ($\alpha > 0, \lambda > 0$), notée $\gamma(\alpha, \lambda)$, si sa loi a la densité :

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} 1_{(0,+\infty)}(x),$$

où $\forall \alpha > 0, \ \Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.

1. Verifier que la loi $\gamma(\alpha, \lambda)$ est bien une loi de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\gamma(\alpha, \lambda)$. Calculer sa transformée de Laplace. Calculer sa moyenne et sa variance par deux méthodes.
3. Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Donner la loi de X^2. En déduire que $\gamma(1/2, 1/2) = \chi^2(1)$.
4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois $\gamma(\alpha_1, \lambda)$ et $\gamma(\alpha_2, \lambda)$.
   (a) Donner la loi de $X + Y$.
   (b) Montrer que $X + Y$ et $\dfrac{X}{X+Y}$ sont indépendantes et calculer leur loi de probabilité.
5. Si $X_1, ..., X_n$ sont n variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ, donner la loi de la somme $S_n = X_1 + ... + X_n$. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.
6. Si $Y_1, ..., Y_n$ sont n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, donner la loi de $Z = Y_1^2 + ... + Y_n^2$ et calculer sa transformée de Laplace, sa moyenne et variance. En déduire que $\gamma(n/2, 1/2) = \chi^2(n)$.

Rappels :

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$,

$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\forall \alpha > 0$,

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 u^{\alpha_1-1}(1-u)^{\alpha_2-1} du = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}, \ \forall \alpha_1, \alpha_2 > 0,$$

La densité d'une loi $\beta(a, b)$, $a, b > 0$, est $f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{1}_{0 \le x \le 1}$.

Exercice 2 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ des réels. Montrer que $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ et $Z = \sum_{i=1}^n b_i X_i$ sont indépendantes équivaut à $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$.

Exercice 3

1. Soient X et ε deux variables aléatoires réelles indépendantes, telles que $P(\varepsilon = +1) = P(\varepsilon = -1) = 1/2$ et X de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $Y = \varepsilon X$.
   (a) Calculer la fonction de répartition de Y. En déduire sa loi.
   (b) Les variables aléatoires réelles X et Y sont-elles non corrélées ?
   (c) Calculer $P(X+Y = 0)$. Le vecteur (X, Y) est-il gaussien ? Les variables aléatoires réelles X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $U = X - Y$ et $V = X + Y - 2Z$.
   (a) Quelles sont les lois de U et de V ?
   (b) Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 Les statistiques $\overline{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ et $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ désignent les estimateurs usuels de μ et σ^2 pour un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Calculer le coefficient de corrélation ρ entre $\overline{X}_n$ et la statistique de Student

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sqrt{S^2}}.$$